

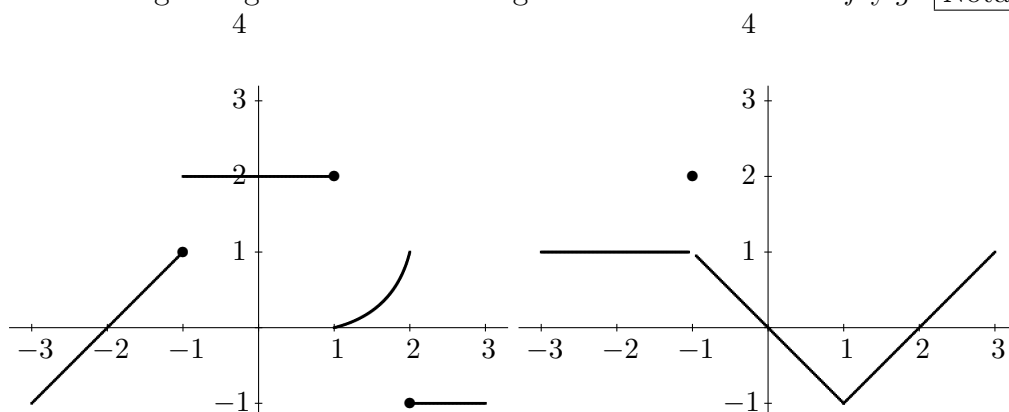
Funciones, límites y continuidad - Entrega 6

Límites de funciones

APELLIDOS:

NOMBRE:

Ejercicio 1. La figura siguiente muestra las gráficas de las funciones f y g . Nota:



Indica si los siguientes límites existen e indica cuánto valen en caso de que existan.

1. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe
3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe
4. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe
5. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe
6. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)$ ☐ Si existe ☐ No existe

Ejercicio 2. Dibuja la gráfica de una función tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$. Nota:

Ejercicio 3. Estudia la existencia del límite en el punto $x = 0$ de la función Nota:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 3} & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Calcula los límites laterales siguientes e indica si existe el límite Nota:

- | | |
|---|---|
| i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$ | ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2}{x - 2} =$ <input type="checkbox"/> Si <input type="checkbox"/> No |
| iii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{ x - 2 } =$ | iv) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{ x - 2 } =$ <input type="checkbox"/> Si <input type="checkbox"/> No |
| v) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} =$ | vi) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} =$ <input type="checkbox"/> Si <input type="checkbox"/> No |
| vii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} =$ | viii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} =$ <input type="checkbox"/> Si <input type="checkbox"/> No |

Ejercicio 5. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que exista el límite siguiente. Nota:

$$f(x) = \begin{cases} (a + x) \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0.$$

Ejercicio 6. Calcula los siguientes límites. Nota:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{4 - 2x^2}}{x^2} =$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} =$

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{sen}(3x + 3)}{x^2 - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3 + e^{1/x}}$

Ejercicio 7. Dibuja la gráfica de una función que:

1. Tenga una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal en $y = -1$.

2. Tenga la recta $y = -3x$ como asíntota oblicua en $+\infty$ y que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$

¿Puedes dibujar la gráfica de una función que verifica todas las condiciones anteriores a la vez?

Ejercicio 8. Estudia la existencia de asíntotas de las siguientes funciones. Nota:

1. $f(x) = xe^{1/x}$

2. $g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

3. $h(x) = \log(x^2 + 3x + 2)$

Ejercicio 9. Demuestra que cuando $x \rightarrow 0$, las expresiones $\frac{x}{2}$ y $\sqrt{1+x} - 1$ son infinitésimos equivalentes. Utiliza este resultado para calcular aproximadamente el valor de $\sqrt{0,98}$. Nota:

Ejercicio 10. Siendo $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, demuestra que

Nota:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Ejercicio 11. Cuestiones. Siendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

Nota:

i) Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo $[-1, 3]$. Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = 0$ ☐ Si ☐ No

ii) Si la función f cumple que $f(x) > 0$ para todo $x \in (0, 3)$ y que el límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) > 0$ ☐ Si ☐ No

iii) Si $|f(x)| \leq |x - 3|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ ☐ Si ☐ No

iv) Si $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Como $f(\frac{1}{2n\pi}) = 0$ y $f(\frac{1}{(2n+1)\pi}) = 0$, podemos asegurar que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ☐ Si ☐ No

v) Si $f(\frac{1}{n}) = 1$ y $f(\frac{\sqrt{2}}{n}) = 3$, entonces podemos asegurar que el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe. ☐ Si ☐ No

vi) Si $f(x) \geq \frac{1}{x}$ si $x > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. ☐ Si ☐ No

vii) Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$, entonces podemos asegurar que existe un número $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (2 - \delta, 2 + \delta) \setminus \{2\}$. ☐ Si ☐ No